Ein Problem über mehrere ebene Bereiche.

Von G. SZEKERES in Shanghai.

Herr G. GRÜNWALD vermutete den folgenden Satz:

Es seien in der Ebene k Bereiche gegeben, deren Projektion auf eine beliebige Gerade eine die Zahl d nicht übertreffende Gesamtlänge hat[1]. *Dann ist die Summe der Flächeninhalte der Bereiche nicht größer als* $\frac{\pi}{4} d^2$.

Wir wollen für diesen Satz einen elementaren Beweis bringen.

Zuerst beweisen wir den folgenden

Hilfssatz. *Es sei in der Ebene ein konvexes n-Eck mit den Seiten* $a_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ *gegeben. Es sei ferner* h_i *der Abstand der Seite* a_i *von der zu ihr parallelen Stützgeraden und es sei endlich* J *der Inhalt des n-Ecks. Dann gelten die Ungleichungen*

$$\frac{1}{6} \sum a_i h_i \leqq J \leqq \frac{1}{4} \sum_i a_i h_i .$$

Das Gleichheitszeichen gilt in der ersten Ungleichung nur für die Dreiecke, in der zweiten Ungleichung nur für die Polygone, die einen Mittelpunkt haben.

Dieser Hilfssatz wurde schon (in etwas anderer Form) von RADEMACHER[2] und ESTERMANN[3] bewiesen. Sie betrachteten den Vektorenbereich W eines beliebigen konvexen Bereiches und bewiesen für dessen Flächeninhalt $J(W)$ mit Hilfe des Brunn—Min-

[1] Mehrfach projizierte Geradenstücke werden dabei nur einfach gerechnet.

[2] H. RADEMACHER, Über den Vektorenbereich eines konvexen ebenen Bereiches, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung*, **34** (1925), S. 64—79.

[3] TH. ESTERMANN, Zwei neue Beweise eines Satzes von Blaschke und Rademacher, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung*, **36** (1927), S. 197—200; Über den Vektorenbereich eines konvexen Körpers, *Math. Zeitschrift*, **28** (1928), S. 471—475.

kowskischen Satzes die Ungleichungen

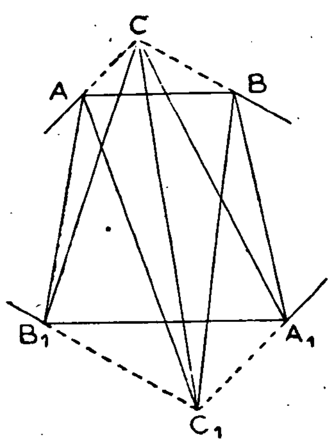
$$\frac{1}{6} J(W) \leqq J \leqq \frac{1}{4} J(W),$$

wo J den Flächeninhalt des gegebenen Bereiches bezeichnet. Es ist leicht einzusehen, daß bei einem ebenen Polygon $J(W)$ gleich $\sum_i a_i h_i$ ist, so daß die beiden Sätze identisch sind. In unserer Form läßt sich aber der Satz ohne Benutzung des Brunn—Minkowskischen Satzes beweisen. Die erste Hälfte dieser Ungleichungen werden wir später nicht gebrauchen, doch geben wir auch hierfür einen einfachen Beweis.

Es sei s_i der Abstand des Schwerpunktes des Polygons von der Seite a_i. Nach einem Satze von MINKOWSKI[4]) gilt die Ungleichung $s_i \geqq \frac{1}{3} h_i$. Gleichheit gilt nur im Falle eines Dreiecks. Verbinden wir den Schwerpunkt mit den Ecken des Polygons und summieren wir die Inhalte der so entstandenen Dreiecke, so erhalten wir unmittelbar die Ungleichung

$$J = \frac{1}{2} \Sigma a_i s_i \geqq \frac{1}{6} \Sigma a_i h_i .$$

Der folgende einfache Beweis der zweiten Ungleichung stammt von Herrn D. LÁZÁR. Wir beweisen die Ungleichung zuerst für solche Polygone, die aus lauter parallelen Seitenparen bestehen. Das einfachste unter solchen Polygonen ist das Parallelogramm. Für dieses gilt offenbar die Gleichung $J = \frac{1}{4} \Sigma a_i h_i$.



Wir wenden nun vollständige Induktion in Bezug auf die Anzahl der Seitenpaaren an. Wir lassen in einem $2n$-Eck das parallele Seitenpaar AB und A_1B_1 weg und bringen die mit ihnen benachbarten Seiten zum Schnitt. Die Schnittpunkte seien C und C_1. So bekommen wir ein $(2n-2)$-Eck, dessen Inhalt mit J_1

[4]) Siehe z. B. bei ESTERMANN, *Math. Zeitschrift*, a. a. O., Hilfssatz 3, wo der Satz elementar bewiesen wird.

und die entsprechende Summe $\Sigma a_i h_i$ mit Σ_1 bezeichnet seien. (Siehe Figur.) Infolge der Induktionsannahme hat man

(1) $$J_1 \leqq \frac{1}{4} \Sigma_1.$$

Wenn die Summe $\Sigma a_i h_i$ des ursprünglichen Bereiches mit Σ bezeichnet wird, dann gilt, wie wir zeigen wollen, die Ungleichung

(2) $$J_1 - J \geqq \frac{1}{4} (\Sigma_1 - \Sigma).$$

Die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sind einander ähnlich. Es sei $AB = a$, $A_1B_1 = \varrho a$, es sei ferner m die zu AB gehörige Höhe von ABC. Dann hat man offenbar die Gleichung

$$J_1 - J = \frac{am}{2} + \frac{\varrho^2 am}{2} = \frac{am}{2}(1+\varrho^2).$$

Bezeichnen wir den Abstand der Parallelen AB und A_1B_1 mit h, den Abstand der Parallelen AC und A_1C_1 mit h_1 und den Abstand der Parallelen BC und B_1C_1 mit h_2, so haben wir:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 - \Sigma &= \overline{B_1C_1}.h_2 + \overline{A_1C_1}.h_1 + \overline{AC}.h_1 + \overline{CB}.h_2 - \overline{AB}.h - \overline{A_1B_1}.h = \\ &= 2(J(B_1C_1A_1C) + J(BCAC_1)) - \overline{AB}.h - \overline{A_1B_1}.h = \\ &= \varrho a(m+h+\varrho m) + a(m+h+\varrho m) - ah - \varrho ah = am(1+\varrho)^2.\end{aligned}$$

Da aber offenbar

(3) $$\frac{am}{2}(1+\varrho^2) \geqq \frac{1}{4} am(1+\varrho)^2$$

ist, so gilt wirklich (2). Aus (1) und (2) erhalten wir endlich

(4) $$J \leqq \frac{1}{4} \Sigma.$$

Derselbe Beweis gilt auch für ein beliebiges Polygon, wenn man, falls die Seite AB kein paralleles Paar hat, $\varrho = 0$ setzt. Da in (3) offenbar nur dann Gleichheit besteht, wenn ϱ gleich 1 ist, so folgt, daß in (4) das Gleichheitszeichen nur im Falle der Polygone mit Mittelpunkt gültig ist.

Zurückkehrend zu unserm eigentlichen Problem, bemerken wir zuerst, daß es genügt, den Satz für den Fall lauter konvexer Bereiche zu beweisen. Denn nehmen wir statt eines jeden Bereiches den kleinsten ihn enthaltenden konvexen Bereich (und, wenn zwei dieser konvexen Hüllen gemeinsame Punkte haben, nehmen wir ihre gemeinsame konvexe Hülle, usw., bis wir nur paarweise punktfremde konvexe Bereiche erhalten), dann ist die Projektion der neuen konvexen Bereiche in eine jede Richtung genau dieselbe, wie diejenige der gegebenen Bereiche; andererseits wird der Gesamtflächeninhalt nicht verkleinert. Wenn also der Satz für konvexe Bereiche gilt, dann gilt er auch für die gegebenen Bereiche.

Es seien also k (abgeschlossene) konvexe Bereiche gegeben, die paarweise punktfremd sind, und deren Projektion auf jede Gerade eine die Zahl d nicht übertreffende Gesamtlänge hat. Es ist zu beweisen, daß ihr Gesamtflächeninhalt nicht größer als $\frac{\pi}{4} d^2$ ist. Wir wollen zum Beweis eine vollständige Induktion anwenden.

Für $k=1$ ist der Satz leicht einzusehen. Bekanntlich ist das arithmetische Mittel der Länge der Projektionen eines konvexen Bereichs gleich $\frac{U}{\pi}$, wo U den Umfang des Bereiches bedeutet. Da dieses Mittel höchstens gleich d sein kann, so hat man $\frac{d^2\pi}{4} \geqq \frac{U^2}{4\pi}$. Nach der isoperimetrischen Ungleichung ist aber stets $J \leqq \frac{U^2}{4\pi}$, so daß die behauptete Ungleichung wirklich statthat. — Etwas umständlicher läßt sich dieser Fall auch elementar, ohne den Begriff der mittleren Projektion beweisen.

Ist $k>1$, so unterwerfen wir sämtliche Bereiche folgender Vergrößerung: Den Abstand h der Stützpunkte zweier parallelen Stützgeraden nennen wir einen Durchmesser des Bereiches. Wir verlängern nun jeden Durchmesser h (in jedem Bereiche) in beiden Richtungen durch die Länge λh. Die Endpunkte der verlängerten Durchmesser bilden wieder konvexe Kurven, wir betrachten die Inneren dieser Kurven. Dieses Verfahren, das jeden Bereich durch einen größeren ersetzt, nennen wir die λ-Vergrößerung der Bereiche. Ist λ genügend klein (was wir annehmen wollen), so sind auch die vergrößerten Bereiche paarweise punktfremd.

Es sei d_i die Länge der Projektion des i-ten Bereiches auf eine Gerade G, dann ist die Länge d_i' der Projektion des λ-vergrößerten Bereiches auf dieselbe Gerade gleich $d_i(1+2\lambda)$, die λ-Vergrößerung verschiebt nämlich die Tangenten an den Endpunkten der Durchmesser offenbar parallel mit sich selbst.

Es sei nun d_G die Gesamtlänge der Gesamtprojektion auf die Gerade G. Diese Gesamtprojektion besteht aus mehreren isolierten Stücken. Bei der λ-Vergrößerung kann die Länge eines solchen Stückes höchstens auf ihre $(1+2\lambda)$-fache wachsen, da die Vergrößerung eines Stückes die Vergrößerung der größten ihm beitragenden Einzelprojektion nicht übertreffen kann. Also kann auch die Länge d'_G der Gesamtprojektion der λ-vergrößerten Bereiche $d_G(1+2\lambda)$ nicht übertreffen:

$$d'_G \leqq (1+2\lambda)\, d_G. \tag{5}$$

Es bedeute nun J' den Gesamtflächeninhalt der λ-vergrößerten Bereiche. Wir behaupten, daß die folgende Ungleichung gilt:

$$J' \geqq J(1+2\lambda)^2. \tag{6}$$

Betrachten wir zuerst ein Polygon, das lauter parallele Seitenpaare hat. Fassen wir das Seitenpaar AB, CD, von den Längen a und b, ins Auge. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß die Vektoren AB und CD gleichgerichtet sind. Der Durchmesser AD vergrößert sich zu $A'D'$, der Durchmesser BC zu $B'C'$. Die Länge von $A'B'$ ist gleich $a+\lambda(a+b)=a'$, diejenige von $C'D'$ ist gleich $b+\lambda(a+b)=b'$. Die zu diesem Seitenpaar gehörige Zunahme des Flächeninhalts ist also gleich

$$J(ABB'A')+J(CDD'C')=\frac{a+a'}{2}\lambda h+\frac{b+b'}{2}\lambda h,$$

wenn man den Abstand zwischen AB und CD mit h bezeichnet. Dieser Ausdruck ist aber nach dem Vorigen gleich $\lambda(\lambda+1)h(a+b)$. Man erhält also für die Zunahme des Flächeninhalts eines λ-vergrößerten konvexen Polygons den Wert

$$\lambda(\lambda+1)\,\Sigma h_i(a_i+b_i),$$

wo die Summe auf alle parallelen Seitenpaaren zu erstrecken ist. Da aber nach dem Hilfssatz für den ursprünglichen Flächeninhalt J des Polygons die Ungleichung $\Sigma h_i(a_i+b_i)\geqq 4J$ gilt, so hat man für den vergrößerten Flächeninhalt J' die Ungleichung

$$J' \geqq J+\lambda(\lambda+1)4J=J(1+2\lambda)^2.$$

Der Beweis gilt, wie man es leicht einsieht, auch im Falle allgemeinerer Polygone (dieser Fall kann ja als Grenzfall des betrachteten angesehen werden, wenn man zuläßt, daß in den parallelen Seitenpaaren eine Seite auch von der Länge 0 sein darf).

Daß die Ungleichung (6) auch für einen beliebigen abgeschlossenen konvexen Bereich gilt, kann man mittels Approximation durch Polygone einsehen.

Nun wählen wir λ so groß, daß zwei von den k gegebenen Bereichen sich berühren. Wir wollen nun diese sich berührende Bereiche durch ihre konvexe Hülle ersetzen. Es kann dann vorkommen, daß diese konvexe Hülle auch mit anderen der gegebenen Bereiche gemeinsame Punkte hat, dann wollen wir die gemeinsame konvexe Hülle aller dieser Bereiche nehmen; und so fahren wir fort, bis (nach höchstens k Schritten) das Verfahren ein Ende nimmt. Dann haben wir statt den k gegebenen Bereichen weniger konvexe Bereiche vor uns, für die also, nach der Induktionsvoraussetzung, der Satz gilt. Da aber dieser Ersetzungsprozess alle Projektionen ungeändert läßt und da er den Gesamtflächeninhalt offenbar nur vergrößern kann, so gilt der Satz notwendig auch für die ursprünglichen Bereiche.

(Eingegangen am 5. Oktober 1938; umgearbeitet am 12. August 1939.)